MAI 1 - domácí úkol ze cvičení 5

1. Dokažte aspoň jednu z limit (užitím definice limity posloupnosti) (a důkaz podrobně napište):
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ (zkuste pak i důkaz pomocí věty o limitě sevřené posloupnosti);
   b) $\lim\limits_{n\to\infty} n(3+\sin n) = \infty$;
   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ pro $a \in (1,\infty)$ (lze už odtud snadno ukázat, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ i pro $a \in (0,1)$?)

2. Dokažte, že platí (důkaz opět sepište podrobně) :
   Jestliže existuje $n_0 \in N$ tak, že pro všechna $n > n_0$ je $a_n \le b_n$ a $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$, pak také $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$.
   A odtud opět lze snadno určit $\lim\limits_{n\to\infty} n(3+\sin n)$ a nebo $\lim\limits_{n\to\infty} (n+\sin n)$.

3. A jako přípravu na cvičení 8.11. si zkuste spočítat limity (nebo ukažte, že daná posloupnost limitu nemá):
   $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2n-1}{2n^2-n+5}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n^3-3n+1}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3n^2+n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{n}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+(-1)^n n!}{-2^n+3\cdot n!}$; $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n-2n!}{n^4+3n^n}$;
   $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$; $\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$.

A dobrovolně:

4*. (Problémek z domácího úkolu ze cvičení 4, pokud jste ho ještě neřešili.)
Dokažte tvrzení: Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ a > 0$, pak je $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. (A zvažte, zda tvrzení platí i pro $a = 0$ $(a_n > 0)$).
A užití : Určete $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+3^n+4^n}$. (tuto limitu zkuste spočítat i užitím věty o limitě sevřené funkce).

5*. Promyslete a pokuste se dokázat:
   a) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a$, $a < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
   b) Je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$, $a < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.
   c) Je-li $a_n > 0,\ n \in N$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$, $a > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.
   d) Je-li $a_n > 0,\ n \in N$ a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$, $a > 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

5. A ukažte si, jak snadno se pomocí tvrzení a) nebo b) z příkladu 5*. dokáže, že
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$ pro každé $x \in R$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{n!} = 0$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ $(a > 1)$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$; .
   („základní“ limity, je „dobré“ je znát) .

6*. Dokažte užitím matematické indukce, že pro všechna přirozená n platí (e je Eulerovo číslo) :

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

(Návod : pro n přirozené užijte odhad $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le e$ a pro horní odhad lze užít tzv. AG nerovnost

$$\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\ldots\cdot x_n} \le \frac{1}{n}(x_1+\ldots\ldots+x_n)$$ (n přirozené, $x_1, \ldots\ldots, x_n$ jsou kladná reálná čísla)).

Hodí se třeba pro důkaz, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty$.